Interrogation rapide n° 1

1 heure

I Questions de cours

1. Donner la Définition du conjugué d'un nombre complexe.
2. Compléter la propriété ci-dessous.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

1. $z + \overline{z} = \cdots\cdots\cdots\cdots$ et $\cdots\cdots\cdots\cdots$
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots$ et $\cdots\cdots\cdots\cdots$
3. $\overline{\overline{z}} = \cdots\cdots\cdots\cdots$ et $\cdots\cdots\cdots\cdots$
4. Action de la conjugaison sur + dans $\mathbb{C}$: $\cdots\cdots\cdots\cdots$
5. Action de la conjugaison sur $\times$ dans $\mathbb{C}$: $\cdots\cdots\cdots\cdots$
6. Action de la conjugaison sur l'inverse, sur le quotient :
   (a) $\cdots\cdots\cdots\cdots$
   (b) $\cdots\cdots\cdots\cdots$

II Exercices

Exercice 1

Donner l'écriture algébrique des nombres suivants :

1. $z_1 = (2i + 1)^2$
2. $z_2 = \dfrac{2 + 5i}{3 - 4i}$

Exercice 2

Soit les nombres complexes $z = 1 - 2i$ et $z' = 2 + 3i$.

Déterminer les formes algébriques de $z + z'$, zz', z^2 et $\dfrac{1}{z^2}$.

Exercice 3

Soit $P(z) = z^2 - 4z + 13$ un polynôme défini sur $\mathbb{C}$:

1. Le polynôme P a-t-il des racines dans $\mathbb{R}$? Justifier.
2. (a) Justifier que l'on peut écrire, pour tout nombre complexe z, $P(z) = (z - 2)^2 + 9$.
   (b) Calculer $(3i)^2$.
   (c) En déduire une factorisation dans $\mathbb{C}$ du polynôme P en produit de polynômes du premier degré.
   (d) Déterminer dans $\mathbb{C}$ les racines du polynôme P.

BONUS

Soit α un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit la suite (z_n) de nombres complexes par $z_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \alpha z_n - i$.

1. Calculer $z_1,\ z_2$ et z_3 en fonction de α.
2. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \dfrac{1-\alpha^n}{\alpha - 1} \times i$